

230. Fandiño Pinilla M. I. (2014). *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*. In: D'Amore B. (Editor) (2014). *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce). Bologna: Pitagora. Pagg. 104. ISBN: 88-371-1892-9. 71-80.

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna)
Diverse componenti dell'apprendimento della matematica.

1. Premessa.

Quando uno studente fallisce in matematica è troppo sbrigativo dire che non ha raggiunto gli obiettivi attesi; in realtà, in che cosa ha fallito? Non ha capito i concetti? Li ha capiti ma non sa usarli per risolvere problemi? Non sa effettuare i calcoli, o li sa effettuare ma non sa a che scopo? Ha costruito i concetti ma non li sa comunicare? Ha risolto un problema ma non sa dire come? Non sa gestire i cambi di rappresentazione semiotica che sempre la matematica richiede fin dai suoi primi passi? In generale, la presenza di *errori* sistematici e ripetuti al termine di un percorso di apprendimento è ovviamente un segno del fatto che l'apprendimento non è avvenuto come avrebbe dovuto, e l'insegnante è posto di fronte al problema del *recupero*.

Cosa fare? Si parte naturalmente esaminando quel che succede in aula durante le ore di matematica, provando a porci le domande precedenti, chiedendoci: come aiutare a risolvere il problema della valutazione in matematica, di una valutazione specifica, che sia d'aiuto a tutti, che permetta di intervenire sulle cause del fallimento? Dire di uno studente: «Bruno non risponde in matematica come io mi aspetterei di sentirmi rispondere», cioè: «Bruno sbaglia», è troppo banale. E adesso, come rimedio alle cause che hanno portato Bruno a sbagliare?

Ma come si fa ad intervenire per *recuperare*, se non si sa determinare con precisione la *causa* dell'errore? Uno stesso errore può avere cause molto diverse, ovviamente, e dipendere da problemi distinti e specifici dell'apprendimento.

Il problema per l'insegnante è quindi quello di “analizzare” (nel senso di “guardare in maniera analitica”) l'apprendimento degli allievi; di disporre di categorie che gli permettano di “scomporre” i diversi fenomeni dell'apprendimento della matematica, che rimane ovviamente un fatto sostanzialmente unitario.

La nostra esperienza ci dice che gli atteggiamenti errati degli studenti possono riguardare fallimenti nell'acquisizione dei concetti, incapacità nella gestione degli algoritmi, mancanza di strategia nella risoluzione dei problemi (uno studente può aver concettualizzato, saper eseguire algoritmi, ma impantanarsi di fronte ad un problema da risolvere; è un caso piuttosto diffuso), non adeguata comunicazione (è il caso dello studente che sa ma che non sa come comunicare quel che sa) o infine una fallimentare gestione dei registri semiotici (forse il fallimento più diffuso, soprattutto nella scuola secondaria). Vi possono essere due di queste cause contemporaneamente o anche tre, ma difficilmente vi sono tutti e cinque i fallimenti contemporaneamente ...

Si può così dividere l'apprendimento della matematica virtualmente in 5 componenti, studiandole una per una come fossero tra loro separate e dando per ciascuna suggerimenti sulla valutazione specifica.

È ovvio che la matematica è una e che l'apprendimento è uno solo, lo ribadiremo più volte, e che dunque questa suddivisione in componenti è puramente di comodo, è solo uno strumento per cercare di rimediare alle cause degli errori e uno strumento per valutare in modo specifico.

Ma la nostra esperienza mostra come questo metodo funzioni e quanto sia pratico; l'abbiamo proposto in molte situazioni di formazione, soprattutto in servizio, e si è rivelato eccellente.

L'apprendimento della matematica, forse il più studiato fra gli apprendimenti disciplinari, si presenta come un fattore multiplo, ricco di mille aspetti: è sotto gli occhi di tutti gli insegnanti il fatto che un apprendimento riuscito in matematica è da considerarsi un'ottimale combinazione di apprendimenti specifici e distinti. In matematica, infatti, non basta aver *costruito* un concetto, ma occorre saperlo *usare* per effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per *risolvere* problemi, occorre saper *spiegare* a sé stessi ed agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di *passare* da una rappresentazione ad un'altra.

Queste considerazioni ci mostrano la complessità ma anche la radicale specificità del tema, e ci fanno vedere la necessità di progettare una valutazione che tenga conto di queste articolazioni.

A scanso di equivoci, ripetiamo che queste "componenti" dell'apprendimento non sono né indipendenti, né separabili, né ad intersezione vuota tra loro; il risultato positivo nell'apprendimento si raggiunge solo grazie ad una serie di concause, ad un insieme olistico di componenti: però dobbiamo tenerne conto in ogni momento del nostro lavoro di classe, per evitare che- senza quasi che ce ne accorgiamo, passando per contratto didattico dal nostro agire a quello degli allievi- una prenda il sopravvento sulle altre, vanificando molta dell'efficacia del nostro lavoro. Pensiamo ad esempio all'enfasi che un tempo si poneva sul *far di conto*; o, per altri aspetti, alle prassi valutative basate esclusivamente su test a risposta chiusa, o al non considerare importante che un allievo sappia anche *spiegare* quello che fa: tutti comportamenti che, alla lunga, portano a un apprendimento "zoppo" della matematica.

Lo sforzo dell'insegnante deve essere quindi quello di condurre un'analisi fine e specifica degli apprendimenti, trattandoli sia in maniera indipendente, che nel loro intreccio. Di fronte allo stesso *errore* di due studenti diversi l'insegnante va dunque alla ricerca della *causa* che ha prodotto quell'errore, e questo significa ricercare quale è stato il malfunzionamento cognitivo, e in definitiva che cosa non ha funzionato nel processo di insegnamento – apprendimento.

Riassumendo, l'apprendimento della matematica comprende almeno 5 tipologie di apprendimenti distinti, anche se non del tutto privi di sovrapposizioni e intrecci, riconducibili a diversi ambiti cognitivi:

- apprendimento concettuale (noetica);
- apprendimento algoritmico (calcolare, operare,...);
- apprendimento di strategie (risolvere, congetturare,...);
- apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare,...);
- apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (di trattamento e di conversione).

Questa partizione non va presa alla lettera, dato che queste componenti si intrecciano e si rafforzano l'un l'altra; tuttavia essa offre una indubbia comodità di analisi e di lettura interpretativa degli errori, cioè di quelle manifestazioni di malessere cognitivo alle quali sarebbe bene voler porre rimedio con successo, in modo efficace. Non è nemmeno detto che la loro unione riesca a comprendere tutte le componenti dell'apprendimento matematico e che dunque un'analisi più fine non riveli altre componenti necessarie.

Quello che è certo, è che ognuno di questi apprendimenti ha bisogno di specifici modelli di valutazione e richiede specifiche pratiche di rinforzo e recupero nei casi difficoltà. Appoggiare su queste categorie l'azione di ingegneria didattica può aiutare l'insegnante a organizzare meglio il proprio lavoro, coordinando l'insegnamento con gli obiettivi di apprendimento.

Solo a mo' di esempio, abbiamo usato insieme a docenti di scuola primaria una lettura specifica di ciascuna delle componenti della matematica di quel livello; se, come si usava dire allora, pochi anni fa, la matematica è l'insieme di componenti disciplinari come numeri, figure, dati, misura e pensiero razionale (trasversale), allora ciascuna di tali componenti disciplinari può essere analizzata attraverso le cinque componenti di prima e fornire utili indicazioni su come operare didatticamente e come rimediare a situazioni di fallimento apprenditivo.

2. Apprendere la matematica e valutare tale apprendimento è una sfida complessa.

Oggi tutti concordiamo sul carattere “costruttivo” dell’apprendimento: apprendere un concetto matematico, apprendere a fare uso di un algoritmo, a comportarsi in modo strategico, a comunicare matematica, sono tutti atteggiamenti *costruttivi*; ma non si può costruire se non c’è un impegno personale, un mettersi in gioco che impegna sé stessi. Il primo attento interprete della costruzione di un apprendimento è colui che costruisce, dunque una delle prime azioni didattiche consiste nell’insegnare strategie, nello spingere a riflettere sulle proprie strategie personali, per percepirle come proprie, per valutarle. L’apprendente è l’autore principale della costruzione di apprendimento e della valutazione di esso.

Ma la valutazione non riguarda solo lo studente.

Una delle funzioni che più caratterizzano l’azione dell’insegnante in aula è la costante “valutazione” della propria azione didattica, del segmento curricolare scelto e del processo di apprendimento dei propri allievi. Rispetto a questo ultimo aspetto, il termine “valutazione” si intende come l’insieme delle azioni mediante le quali si riconoscono le caratteristiche apprenditive degli studenti e si determinano gli aspetti nei quali si deve centrare l’aiuto che permette di garantire al meglio questo apprendimento. In questa cornice di azioni, l’insegnante deve prestare attenzione agli strumenti attraverso i quali misura il giudizio su ciascun individuo, in relazione con l’apprendimento della matematica. Non si può e non si deve pensare ad un unico strumento per questa valutazione perché la ricerca ha messo in evidenza la *necessità* di far uso di vari e diversificati strumenti. Il portfolio¹ è solo *uno* degli strumenti; esso offre una grande varietà di possibilità dato che, al suo interno, si può evidenziare ciascuno degli aspetti che fanno parte dell’apprendimento della matematica:

apprendimento concettuale,
algoritmico,
strategico,
comunicativo,
semiotico.

Per ciascuno di questi quattro aspetti, fornirò esempi di uso del portfolio. Si tratta, ripeto, *solo* di esempi che l’insegnante potrà usare per creare a sua volta occasioni per i propri allievi, adatte alla classe ed in conformità con la sua “storia di classe”. Gli esempi sono scelti a vari livelli, per classi distinte; sta all’insegnante, una volta capito lo spirito, adattarli, modificarli, sceglierne altri, più efficaci.

I successivi suggerimenti concreti servono a ridare al portfolio la sua funzione di strumento di valutazione, anzi di strumento che permette di collaborare alla propria autovalutazione; il portfolio non è dunque riducibile, come in certi contesti appare, ad una raccolta di schede di valutazione preconfezionate; è strumento attivo e costruttivo, di forte impatto cognitivo.

3. Apprendimento concettuale.

Appare evidente il fatto che in matematica si costruiscono concetti. Un concetto si considera costruito quando l’allievo è in grado di identificare proprietà del concetto, di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla in modo opportuno. Ecco quindi che risulta interessante, per il portfolio, creare occasioni nelle quali gli studenti abbiano la possibilità di mostrare di aver costruito concetti. Si può usare la tecnica del TEP (una sigla tedesca, molto usata in didattica, per

¹ L’autrice di questo articolo ha lunga esperienza di uso del portfolio nel suo Paese di origine, dove è stato introdotto nel 1992 soprattutto nella scuola secondaria superiore e dove fa ora parte integrante degli strumenti di valutazione. Proprio la lunga consuetudine le permette di essere critica (in senso costruttivo) rispetto all’uso di questo strumento, il cui senso appare a volte storpiato.

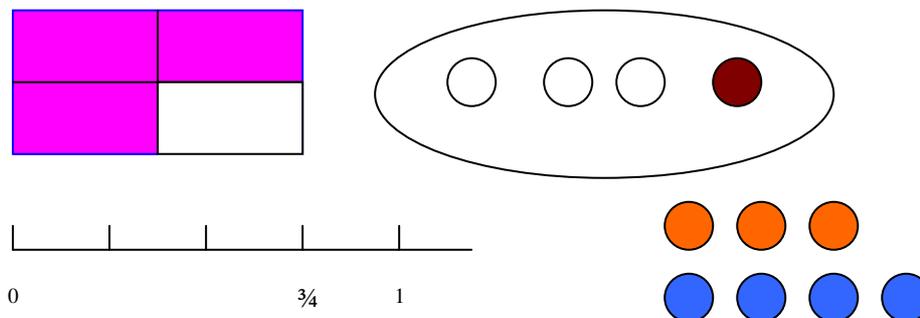
identificare “testi scritti di matematica prodotti in modo autonomo”). L’insegnante deve creare gli stimoli giusti.

Tu sei un allievo che sta iniziando la II superiore; mentre vai a scuola, una mattina, incontri un compagno più giovane, che sta iniziando la I; egli è spaventato perché qualcuno gli ha detto che in I dovrà studiare le equazioni; siccome questo tema tu l’hai già studiato, proprio in I, lo tranquillizzi dicendogli che non c’è nulla che deve spaventarlo, dato che si tratta di un tema facile e ti offri di anticipargli le cose più importanti sopra questo tema per iscritto. Questo è lo scritto che gli proponi:
...

Abbiamo appena terminato la unità “operazioni con i numeri razionali”; adesso, per organizzare quel che ho appreso, faccio una mappa concettuale (cioè uno schema con delle frecce) che include le parole chiave e le relazioni tra loro.

Spiega ad un bambino di I media che cos’è una frazione.

Osserva le seguenti figure. Quale di esse rappresenta meglio secondo te la frazione $\frac{3}{4}$? Perché?



Maria e Giovanni hanno ciascuno una certa quantità di euro; Maria spende $\frac{1}{3}$ dei propri soldi e Giovanni $\frac{1}{2}$ dei propri. È possibile che Maria abbia speso più di Giovanni? Giustifica la tua risposta e fa degli esempi.

Molto utile per verificare apprendimenti concettuali è il ricorso alla storia della matematica, sempre più diffusa nelle scuole italiane dei vari livelli. La storia è molto adatta a considerazioni personali, a riflessioni, a ripassi, a discussioni, insomma: al portfolio.

Scegli l’affermazione con la quale concordi e giustificala:

I numeri usati dai Romani erano:

- molto interessanti perché usavano lettere
- inappropriati perché non si potevano fare le operazioni a mano come facciamo noi
- importanti, dato che ancora oggi si usano
- interessanti perché erano in base dieci.

Il sistema numerico dei Maya fu:

- importante perché era un sistema a base venti con solo 3 simboli
- molto importante perché comprendeva un uso perfetto dello zero
- per nulla interessante perché rimase isolato e non arrivò in Europa
- inappropriato perché la scrittura dei numeri grandi era troppo complicata.

4. Apprendimento algoritmico.

È in relazione con l'abilità nel dare la risposta alle operazioni, al calcolo, all'applicare formule o al disegno di figure usando strumenti opportuni.

Trova il procedimento più efficace per risolvere ciascuna di queste situazioni e giustifica la tua risposta; puoi scegliere tra calcolatrice, calcolo mentale, calcolo a mano, altra tecnica (in tal caso, descrivila):

- qual è il resto della divisione $4567:230$?
- se una matita costa 0,75€, quanto costano 10 matite?
- qual è la radice quadrata di 576?
- trova la somma dei primi cento numeri naturali a partire da 1
- esegui: $2356-1356$
- esegui: $300+450+200$

Sai che $35-20=15$; quanto fa $35-19$? Uno in più o uno in meno di 15? Perché?

5. Apprendimento strategico.

Si cerca di potenziare e di dare importanza a procedimenti e strategie che si usano quando si risolve un problema. Bisogna arrivare a convincere tutti gli studenti che quel che conta sono i processi e non i prodotti.

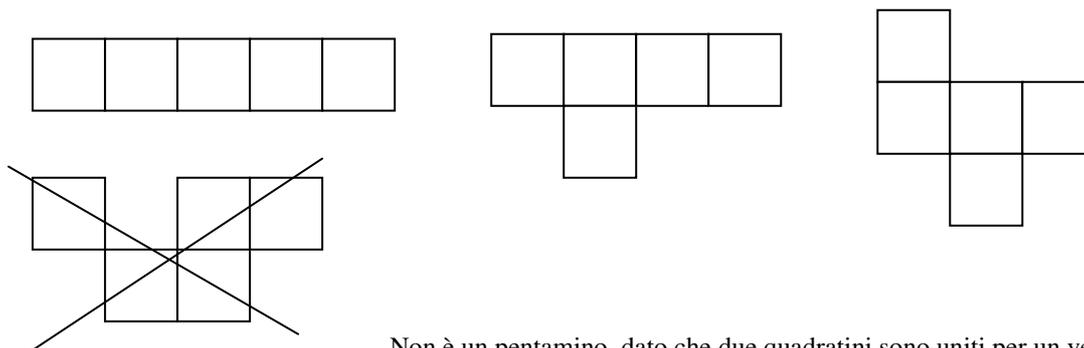
L'insegnante può disegnare, per ciascun allievo, una tabella che contenga i diversi aspetti del processo di risoluzione di un problema: comprensione del problema, trasformazione o traduzione dell'enunciato in una forma algebrica, scelta e uso delle strategie, validazione della risposta.

Per esempio:

Aspetti da valutare	Sì	No	In parte	Osservazioni
Comprende il problema				
Presenta diverse strategie				
Spiega la(le) strategia(e) usata(e)				
Sviluppa coerentemente la strategia				
Presenta una soluzione				
Verifica la soluzione				
Difende la soluzione data (validazione)				
...				

Con una calcolatrice, trova tre numeri il cui prodotto sia 2431. Annota passo per passo quel che fai per trovare la risposta.

Un utile strumento, molto adatto ad attività sui poligoni, sono i pentamini, cioè figure formate da 5 quadratini tutti identici che devono essere accostati lato a lato. Ecco alcuni esempi:



Non è un pentamino, dato che due quadratini sono uniti per un vertice e non per un lato.

Attraverso questi “giochi”, gli allievi mettono in moto strategie anche complesse (e discussioni). Quanti sono i possibili pentamini? Quali di essi possono essere usati per ricoprire un pavimento? È possibile formare con dei pentamini un rettangolo 12×5 ? Tutti i pentamini hanno la stessa area? E lo stesso perimetro? Che cosa puoi dire sui pentamini? Fa tu stesso qualche scoperta.

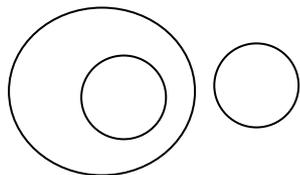
6. Apprendimento comunicativo.

Questo aspetto dell'apprendimento matematico, troppo spesso dimenticato o sottaciuto, cerca di mettere in evidenza la capacità di esprimere idee matematiche o, più in generale, logiche, giustificando, argomentando, dimostrando (in forme adatte allo studente, sia per orale che per iscritto) e rappresentando in modo visivo con figure.

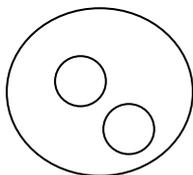
Gli Egizi e la matematica.

La tua attività consiste nel raccontare ai compagni gli apporti matematici di questa civiltà, tanto in geometria come in aritmetica ed in architettura; puoi fa uso di informazioni prese da libri di storia o di matematica, da Internet o da Enciclopedie. Illustra il tuo lavoro con disegni, i quali posso essere realizzati da te stesso o presi direttamente dalle fonti di consultazione. Cerca di introdurre nel tuo lavoro una descrizione sulla organizzazione sociale, politica ed economica degli Egizi, stabilendo una relazione con la matematica che essi usavano.²

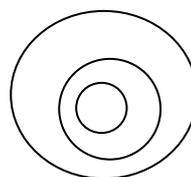
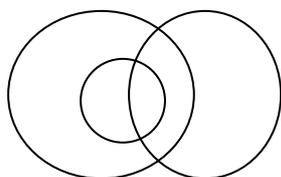
Il seguente schema



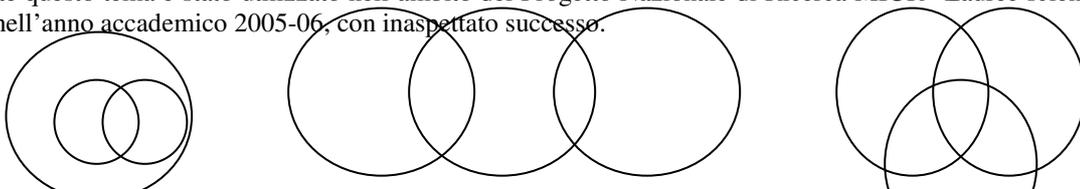
si può interpretare così:
 tutti i canarini sono uccelli
 nessun gatto è un uccello.
 Come si può interpretare il seguente schema:



usando i termini: libri, quotidiani, oggetti stampati?
 Se l'insegnante lo ritiene opportuno, può dare altri schemi analoghi, come i seguenti:



² Esattamente questo tema è stato utilizzato nell'ambito del Progetto Nazionale di Ricerca MIUR “Lauree scientifiche” a Bologna, nell'anno accademico 2005-06, con inaspettato successo.



suggerendo sostantivi adatti alle diverse situazioni:

Romani, Italiani, Europei

donne, medici, persone con gli occhi azzurri

Italiani, scienziati, persone

musicisti, artisti, calciatori professionisti

rane, anfibi, cavalli

numeri dispari, numeri primi, numeri naturali

triangoli, quadrilateri, poligoni

e ponendo domande come le seguenti:

- Scegli lo schema che ti sembra più adeguato a ciascuna situazione descritta
- Spiega la scelta che hai fatto
- Proponi altri esempi che possano essere rappresentati con ciascuno schema.

Questa attività didattica, molto praticata in vari Paesi del mondo, costringe alla discussione, al dialogo, dunque alla comunicazione.

7. Conclusione.

L'apprendimento della matematica è complesso, visto che è formato da varie componenti, almeno le quattro qui descritte.

Dunque, al momento della valutazione, è importante distinguere almeno queste, arrivando a concepire, per ogni allievo, una tabella siffatta:

Nome:	Prova 1, data	Prova 2, data	...	Portfolio	Totali
Apprendimento concettuale					
Apprendimento algoritmico					
Apprendimento strategico					
Apprendimento comunicativo					
Note					

Bibliografia.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Godino JD., Arrigo G., Fandiño Pinilla MI. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Radford L., Demers S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2006). L'apprendimento della matematica e la sua valutazione: una sfida complessa. *Riforma & Didattica*. 4, vol. 10. 49-53. Editore: Falzea, Reggio Calabria.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento:Erickson.